

Investition & Finanzierung

2. Investitionsrechnung unter Sicherheit

Univ.-Prof. Dr. Dr. Andreas Löffler (AL@wacc.de)



Unter “Cashflows” verstehen wir Ein- sowie Auszahlungen. Wir konzentrieren uns vollkommen auf diese **Zahlungswirkungen** und abstrahieren von allen anderen Eigenschaften.

Wir gehen davon aus, dass die Zahlungen CF_t aus einem Projekt sicher und uns bekannt sind. Das Projekt hat eine Laufzeit von T und kostet heute I_0 .

- ▶ **Investition** ist eine Tätigkeit, die zunächst Auszahlungen und später Einzahlungen verursacht. (– – + + +)
- ▶ **Finanzierung** nennen wir dagegen einen Vorgang, der mit Einzahlungen beginnt, auf die später Auszahlungen folgen. (+ – – – –)

Alle anderen Aktivitäten haben keine eigenen Bezeichnungen.

Grundbegriffe

Dynamische
Verfahren

Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

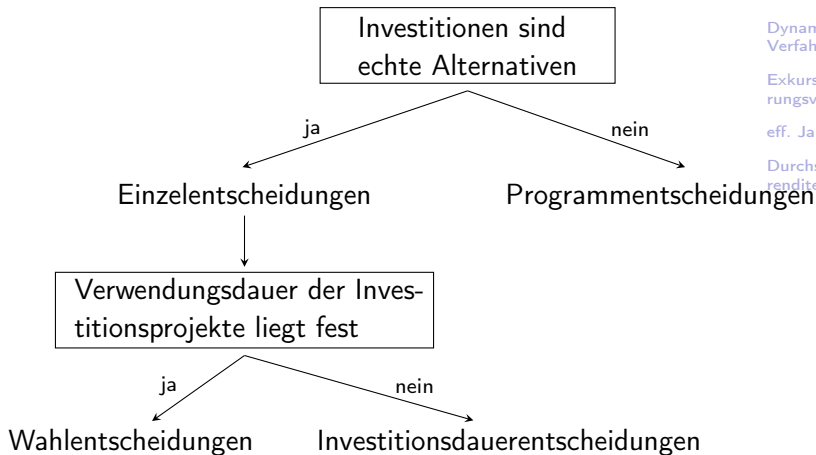
Grundbegriffe

Dynamische
Verfahren

Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite



	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$
A	-100	40	70
B	-100	70	40

Statische Sicht

Wir verdienen mit beiden Projekten im Durchschnitt dasselbe. Daher

$$A \sim B.$$

Solche Verfahren werden wir nicht behandeln.

Dynamische Sicht

Frühe Einzahlungen sind angenehmer als späte. Daher

$$A \prec B.$$

Grundbegriffe

Dynamische
Verfahren

Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

Grundbegriffe

**Dynamische
Verfahren**

Vollständiger
Finanzplan
Kapitalwert
Interner Zinssatz

Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

Wir behandeln hier

- ▶ Vollständiger Finanzplan
- ▶ Kapitalwertmethode (NPV, DCF)
- ▶ Interner Zinssatz (IRR)

NPV = net present value

DCF= discounted cashflow

IRR = internal rate of return

Zeitpunkte		$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
Projekt A	Basiszahlungen M_t	100	80	120.00	90.00
	Entnahmen C_t	100	100	100.00	100.00
	Zinsen Z_t				
	Kontostand K_t				
Projekt B	Basiszahlungen M_t	100	80	120.00	90.00
	Entnahmen C_t	100	100	100.00	100.00
	Cashflows CF_t	-80	70	-20.00	90.00
	Zinsen Z_t		-12	6.30	-7.25
	Kontostand K_t	-80	-42	-48.30	24.46
Unterlassungs- alternative	Basiszahlungen M_t	100	80	120.00	90.00
	Entnahmen C_t	100	100	100.00	100.00
	Zinsen Z_t		0	-3.00	-0.45
	Kontostand K_t	0	-20	-3.00	-13.45

Grundbegriffe

Dynamische
Verfahren

**Vollständiger
Finanzplan**
Kapitalwert
Interner Zinssatz

Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

“Basiszahlungen” und “Entnahmen” sind unabhängig von den Projekten.

Für die Zinssätze gilt $i_H = 10\%$, $i_S = 15\%$

Zeitpunkte		$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
Projekt A	Basiszahlungen M_t	100	80	120.00	90.00
	Entnahmen C_t	100	100	100.00	100.00
	Cashflows CF_t	-70	50	70.00	-
	Zinsen Z_t				
	Kontostand K_t	-70.00			
Projekt B	Basiszahlungen M_t	100	80	120.00	90.00
	Entnahmen C_t	100	100	100.00	100.00
	Cashflows CF_t	-80	70	-20.00	90.00
	Zinsen Z_t		-12	6.30	-7.25
	Kontostand K_t	-80	-42	-48.30	24.46
Unterlassungs- alternative	Basiszahlungen M_t	100	80	120.00	90.00
	Entnahmen C_t	100	100	100.00	100.00
	Zinsen Z_t		0	-3.00	-0.45
	Kontostand K_t	0	-20	-3.00	-13.45

Grundbegriffe

Dynamische
Verfahren

**Vollständiger
Finanzplan**
Kapitalwert
Interner Zinssatz

Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

“Basiszahlungen” und “Entnahmen” sind unabhängig von den Projekten.

Für die Zinssätze gilt $i_H = 10\%$, $i_S = 15\%$

Zeitpunkte		$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
Projekt A	Basiszahlungen M_t	100	80	120.00	90.00
	Entnahmen C_t	100	100	100.00	100.00
	Cashflows CF_t	-70	50	70.00	-
	Zinsen Z_t		-10.50		
	Kontostand K_t	-70.00	-50.50		
Projekt B	Basiszahlungen M_t	100	80	120.00	90.00
	Entnahmen C_t	100	100	100.00	100.00
	Cashflows CF_t	-80	70	-20.00	90.00
	Zinsen Z_t		-12	6.30	-7.25
	Kontostand K_t	-80	-42	-48.30	24.46
Unterlassungs- alternative	Basiszahlungen M_t	100	80	120.00	90.00
	Entnahmen C_t	100	100	100.00	100.00
	Zinsen Z_t		0	-3.00	-0.45
	Kontostand K_t	0	-20	-3.00	-13.45

Grundbegriffe

Dynamische
Verfahren

**Vollständiger
Finanzplan**
Kapitalwert
Interner Zinssatz

Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

“Basiszahlungen” und “Entnahmen” sind unabhängig von den Projekten.

Für die Zinssätze gilt $i_H = 10\%$, $i_S = 15\%$

Zeitpunkte		$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
Projekt A	Basiszahlungen M_t	100	80	120.00	90.00
	Entnahmen C_t	100	100	100.00	100.00
	Cashflows CF_t	-70	50	70.00	-
	Zinsen Z_t		-10.50	-7.58	
	Kontostand K_t	-70.00	-50.50	31.93	
Projekt B	Basiszahlungen M_t	100	80	120.00	90.00
	Entnahmen C_t	100	100	100.00	100.00
	Cashflows CF_t	-80	70	-20.00	90.00
	Zinsen Z_t		-12	6.30	-7.25
	Kontostand K_t	-80	-42	-48.30	24.46
Unterlassungs- alternative	Basiszahlungen M_t	100	80	120.00	90.00
	Entnahmen C_t	100	100	100.00	100.00
	Zinsen Z_t		0	-3.00	-0.45
	Kontostand K_t	0	-20	-3.00	-13.45

Grundbegriffe

Dynamische
Verfahren

**Vollständiger
Finanzplan**
Kapitalwert
Interner Zinssatz

Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

“Basiszahlungen” und “Entnahmen” sind unabhängig von den Projekten.

Für die Zinssätze gilt $i_H = 10\%$, $i_S = 15\%$

Zeitpunkte		$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
Projekt A	Basiszahlungen M_t	100	80	120.00	90.00
	Entnahmen C_t	100	100	100.00	100.00
	Cashflows CF_t	-70	50	70.00	-
	Zinsen Z_t		-10.50	-7.58	3.19
	Kontostand K_t	-70.00	-50.50	31.93	25.12
Projekt B	Basiszahlungen M_t	100	80	120.00	90.00
	Entnahmen C_t	100	100	100.00	100.00
	Cashflows CF_t	-80	70	-20.00	90.00
	Zinsen Z_t		-12	6.30	-7.25
	Kontostand K_t	-80	-42	-48.30	24.46
Unterlassungs- alternative	Basiszahlungen M_t	100	80	120.00	90.00
	Entnahmen C_t	100	100	100.00	100.00
	Zinsen Z_t		0	-3.00	-0.45
	Kontostand K_t	0	-20	-3.00	-13.45

Grundbegriffe

Dynamische
Verfahren

**Vollständiger
Finanzplan**
Kapitalwert
Interner Zinssatz

Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

“Basiszahlungen” und “Entnahmen” sind unabhängig von den Projekten.

Für die Zinssätze gilt $i_H = 10\%$, $i_S = 15\%$

Zeitpunkte		$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
Projekt A	Basiszahlungen M_t	100	80	120.00	90.00
	Entnahmen C_t	100	100	100.00	100.00
	Cashflows CF_t	-70	50	70.00	
	Zinsen Z_t		-10.50	-7.58	3.19
	Kontostand K_t	-70	-50.50	31.93	25.12
Projekt B	Basiszahlungen M_t	100	80	120.00	90.00
	Entnahmen C_t	100	100	100.00	100.00
	Cashflows CF_t	-80	70	-20.00	90.00
	Zinsen Z_t		-12	-6.30	-7.25
	Kontostand K_t	-80	-42	-48.30	24.46
Unterlassungs- alternative	Basiszahlungen M_t	100	80	120.00	90.00
	Entnahmen C_t	100	100	100.00	100.00
	Zinsen Z_t		0	-3.00	-0.45
	Kontostand K_t	0	-20	-3.00	-13.45

Grundbegriffe

Dynamische
Verfahren

**Vollständiger
Finanzplan**

Kapitalwert
Interner Zinssatz

Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

Rechenregel zur Ermittlung des Endvermögens

◁ 7 ▷

Vorlesung
Sicherheit

Grundbegriffe

Dynamische
Verfahren

**Vollständiger
Finanzplan**

Kapitalwert
Interner Zinssatz

Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

Beim Finanzplan wird das **Endvermögen maximiert**. Wie berechnet sich dieses Endvermögen?

$$K_0 = M_0 - C_0 - I_0$$

$$K_t = \begin{cases} M_t - C_t + CF_t + (1 + i_H) \cdot K_{t-1}, & \text{wenn } K_{t-1} \geq 0; \\ M_t - C_t + CF_t + (1 + i_S) \cdot K_{t-1}, & \text{wenn } K_{t-1} < 0. \end{cases}$$

(Das Projekt ist nur finanzierbar, wenn K_t in keinem Zeitpunkt kleiner als eine untere Schranke ist.)

Nachteil des Finanzplans: Man muss die Basiszahlungen M_t kennen.

Um den Kapitalwert zu verwenden setzt man einen perfekten Kapitalmarkt voraus.

Definition: Ein Kapitalmarkt heißt *perfekt*, wenn er
vollkommen ist (Habenzinsen i_H gleich Sollzinsen $i_S = i$),
unbeschränkt ist (kein Finanzierungslimit),
reibungsfrei ist (keine Transaktionskosten, Steuern).

Grundbegriffe

Dynamische
Verfahren

Vollständiger
Finanzplan

Kapitalwert
Interner Zinssatz

Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

Definition: Der Kapitalwert oder NPV ist

$$NPV = -I_0 + \sum_{t=1}^T \frac{CF_t}{(1+i)^t}$$

Die Entscheidungsregel beim Kapitalwert lautet

- ▶ Wähle die Investition mit dem höchsten Kapitalwert!
- ▶ Unterlasse Investitionen mit negativem NPV!

Was haben Kapitalwert und Endvermögensmaximierung gemeinsam? Sind es verschiedene Zielsetzungen? Nein. Dazu schauen wir uns die Budgetgleichungen genauer an:

$$K_0 = M_0 - C_0 - I_0$$

$$K_t = M_t - C_t + CF_t + (1 + i) \cdot K_{t-1}$$

$$K_1 = M_1 - C_1 + CF_1 + (1 + i) \cdot K_0$$

Grundbegriffe

Dynamische
Verfahren

Vollständiger
Finanzplan

Kapitalwert

Interner Zinssatz

Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

Grundbegriffe

Dynamische
Verfahren

Vollständiger
Finanzplan

Kapitalwert

Interner Zinssatz

Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

$$\begin{aligned}K_1 &= M_1 - C_1 + CF_1 + (1 + i) \cdot K_0 \\ &= M_1 - C_1 + CF_1 + (1 + i) \cdot (M_0 - C_0 - I_0)\end{aligned}$$

Grundbegriffe

Dynamische
Verfahren

Vollständiger
Finanzplan

Kapitalwert

Interner Zinssatz

Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

$$\begin{aligned}K_1 &= M_1 - C_1 + CF_1 + (1 + i) \cdot K_0 \\ &= M_1 - C_1 + CF_1 + (1 + i) \cdot (M_0 - C_0 - I_0) \\ K_2 &= M_2 - C_2 + CF_2 + (1 + i) \cdot K_1\end{aligned}$$

Grundbegriffe

Dynamische
Verfahren

Vollständiger
Finanzplan

Kapitalwert

Interner Zinssatz

Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

$$\begin{aligned}K_1 &= M_1 - C_1 + CF_1 + (1 + i) \cdot K_0 \\ &= M_1 - C_1 + CF_1 + (1 + i) \cdot (M_0 - C_0 - I_0) \\ K_2 &= M_2 - C_2 + CF_2 + (1 + i) \cdot K_1 \\ &= M_2 - C_2 + CF_2 \\ &\quad + (1 + i) \cdot (M_1 - C_1 + CF_1) \\ &\quad + (1 + i)^2 \cdot (M_0 - C_0 - I_0)\end{aligned}$$

Grundbegriffe

Dynamische
Verfahren

Vollständiger
Finanzplan
Kapitalwert
Interner Zinssatz

Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

$$\begin{aligned}K_1 &= M_1 - C_1 + CF_1 + (1 + i) \cdot K_0 \\ &= M_1 - C_1 + CF_1 + (1 + i) \cdot (M_0 - C_0 - I_0) \\ K_2 &= M_2 - C_2 + CF_2 + (1 + i) \cdot K_1 \\ &= M_2 - C_2 + CF_2 \\ &\quad + (1 + i) \cdot (M_1 - C_1 + CF_1) \\ &\quad + (1 + i)^2 \cdot (M_0 - C_0 - I_0) \\ &= \sum_{t=0}^2 (1 + i)^{2-t} \cdot (M_t - C_t) \\ &\quad - (1 + i)^2 \cdot I_0 + \sum_{t=1}^2 (1 + i)^{2-t} \cdot CF_t\end{aligned}$$

Es ergibt sich nach beständigem Einsetzen der Zusammenhang

$$K_T = \underbrace{\sum_{t=0}^T (1+i)^{T-t} \cdot (M_t - C_t)}_{\text{projektunabhängig}} + (1+i)^T \cdot \underbrace{\left(-I_0 + \sum_{t=1}^T (1+i)^{-t} \cdot CF_t \right)}_{\text{projektabhängig}} \quad (*)$$

Kapitalwert

Grundbegriffe

Dynamische
Verfahren

Vollständiger
Finanzplan
Kapitalwert
Interner Zinssatz

Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

Satz Wir betrachten zwei Projekte A und B. Dann gilt:

Endkontostand bei A größer als bei B \iff NPV von A $>$ NPV von B

Wir stellen fest: Wenn ein perfekter Kapitalmarkt vorliegt, führen Kapitalwert und vollständiger Finanzplan zu identischen Entscheidungen.

Kapitalwert: Tabellarische Berechnung (Abb. 4)

◁ 14 ▷

	Zeitpunkte Abzinsungsfaktoren	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
A	Cashflows, ... diskontiert ... und addiert	-70	50.00	70.00	
B	Cashflows, ... diskontiert ... und addiert	-80	70.00	-20.00	90.00

Grundbegriffe

Dynamische
Verfahren

Vollständiger
Finanzplan
Kapitalwert
Interner Zinssatz

Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

Kapitalwert: Tabellarische Berechnung (Abb. 4)

◁ 14 ▷

	Zeitpunkte	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
	Abzinsungsfaktoren	1	0.9091	0.8264	0.7513
A	Cashflows, ... diskontiert ... und addiert	-70	50.00	70.00	
B	Cashflows, ... diskontiert ... und addiert	-80	70.00	-20.00	90.00

Grundbegriffe

Dynamische
Verfahren

Vollständiger

Finanzplan

Kapitalwert

Interner Zinssatz

Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

Kapitalwert: Tabellarische Berechnung (Abb. 4)

◁ 14 ▷

	Zeitpunkte	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
	Abzinsungsfaktoren	1	0.9091	0.8264	0.7513
A	Cashflows, ... diskontiert ... und addiert	-70 -70	50.00 45.45	70.00 57.85	
B	Cashflows, ... diskontiert ... und addiert	-80 -80	70.00 63.64	-20.00 -16.53	90.00 67.62

Grundbegriffe

Dynamische
Verfahren

Vollständiger
Finanzplan
Kapitalwert
Interner Zinssatz

Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

Kapitalwert: Tabellarische Berechnung (Abb. 4)

◁ 14 ▷

	Zeitpunkte	$t = 0$	$t = 1$	$t = 2$	$t = 3$
	Abzinsungsfaktoren	1	0.9091	0.8264	0.7513
A	Cashflows, ... diskontiert	-70	50.00	70.00	
	... und addiert	-70	45.45	57.85	
		33.31			
B	Cashflows, ... diskontiert	-80	70.00	-20.00	90.00
	... und addiert	-80	63.64	-16.53	67.62
		34.73			

Anmerkung: B ist besser als A, weil jetzt der Soll-Zinssatz 10% beträgt.

Grundbegriffe

Dynamische
Verfahren

Vollständiger
Finanzplan
Kapitalwert
Interner Zinssatz

Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

Wie kann man den Kapitalwert ökonomisch interpretieren?

$$NPV = - \underbrace{I_0}_{\text{Preis Investition}} + \underbrace{\sum_{t=1}^T \frac{\overbrace{CF_t}^{\text{Preis eines CF}}}{(1+i)^t}}_{\text{Preis aller CF am Kapitalm.}}$$

Der Kapitalwert beschreibt also die Preisdifferenz einer Investition im Verhältnis zum Kapitalmarkt!

Grundbegriffe

Dynamische
VerfahrenVollständiger
Finanzplan
Kapitalwert
Interner ZinssatzExkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

Grundbegriffe

Dynamische
Verfahren

Vollständiger
Finanzplan
Kapitalwert

Interner Zinssatz

Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

Die Frage: “Wie hoch ist die Rendite der Investition?”

$$NPV = -I_0 + \sum_{t=1}^T \frac{CF_t}{(1 + i_z)^t} \stackrel{!}{=} 0$$

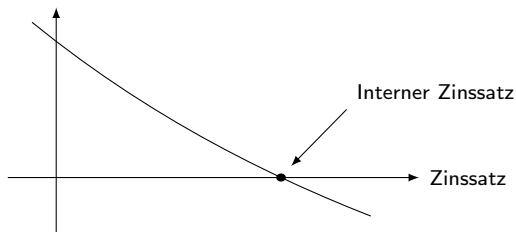
Mögliche Entscheidungsregel: Wähle die Investition mit dem höchsten internen Zinssatz i_z !

Unterlasse Investitionen, bei denen der interne Zins kleiner als der Marktzins ist ($i_z < i$)!

$$-I_0 = -70 \quad CF_1 = 50 \quad CF_2 = 70 \quad CF_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad i_z = 41.9\%$$

Wir zeichnen NPV als Funktion des Zinssatzes und suchen die Nullstelle.

NPV (Zinssatz)



Hinweis: Man bedient sich der Excel-Zielwertsuche (hilfreich: *Tage360(·,·)*) oder eines Näherungsverfahrens.

Grundbegriffe

Dynamische
Verfahren

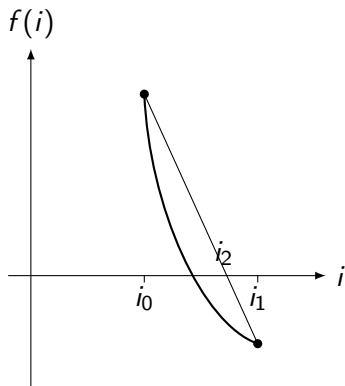
Vollständiger
Finanzplan
Kapitalwert

Interner Zinssatz

Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite



Wie findet man eine Nullstelle i^* einer Funktion $f(i)$?

Man verbindet die Funktionswerte der ersten beiden geschätzten Werte i_0 und i_1 . Der Schnittpunkt mit der i -Achse ist der neue Wert i_2 .

Grundbegriffe

Dynamische
Verfahren

Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

Problem

Herleitung
Beispiel

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

Grundbegriffe

Dynamische
VerfahrenExkurs: Nähe-
rungsverfahren**Problem**
Herleitung
Beispiel

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

Für den neuen Wert i_2 gibt es drei Möglichkeiten

$$\begin{cases} f(i_2) = 0 & \text{Dann haben wir die Lösung!} \\ f(i_2) < 0 & i_2 \text{ ersetzt } i_1 \\ f(i_2) > 0 & i_2 \text{ ersetzt } i_0, \end{cases}$$

wobei in den letzten beiden Fällen die Rechnung erneut beginnt. Nach genügend vielen Schritten konvergiert das Verfahren für jede stetige Funktion f .

Die Gleichung einer Geraden lautet

$$y = a \cdot i + b$$

Dabei wissen wir bereits

$$f(i_0) = a \cdot i_0 + b$$

$$f(i_1) = a \cdot i_1 + b$$

und daraus lassen sich a und b bestimmen:

$$a = \frac{f(i_0) - f(i_1)}{i_0 - i_1}, \quad b = \frac{i_0 f(i_1) - i_1 f(i_0)}{i_0 - i_1}.$$

i_2 ist derjenige Punkt, an dem die Gerade die i -Achse schneidet, also

$$0 = a \cdot i_2 + b \quad \Longrightarrow \quad i_2 = \frac{i_1 f(i_0) - i_0 f(i_1)}{f(i_0) - f(i_1)}.$$

Grundbegriffe

Dynamische
VerfahrenExkurs: Nähe-
rungsverfahrenProblem
Herleitung
Beispiel

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

Grundbegriffe

Dynamische
Verfahren

Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

Problem
Herleitung
Beispiel

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

Wir suchen den internen Zins einer Investition mit $I_0 = 100$ und Cashflows $CF_1 = 30$, $CF_2 = 20$ und $CF_3 = 70$.

Das ergibt die Iterationsregel

$$i_2 = \frac{i_1 f(i_0) - i_0 f(i_1)}{f(i_0) - f(i_1)}$$

mit

$$f(i) := -100 + \frac{30}{1+i} + \frac{20}{(1+i)^2} + \frac{70}{(1+i)^3}$$

Wir beginnen mit $i_0 = 0$ und $i_1 = 10\%$, da beide NPVs verschiedenes Vorzeichen aufweisen. Wir erhalten schrittweise mit der Gleichung aus der vorigen Folie

$$i_0 = 0$$

$$i_1 = 0.1$$

$$i_2 = 0.0847$$

$$i_3 = 0.082260$$

$$i_4 = 0.082336$$

$$i_5 = 0.082336$$

Grundbegriffe

Dynamische
Verfahren

Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

Problem
Herleitung
Beispiel

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

Grundbegriffe

Dynamische
Verfahren

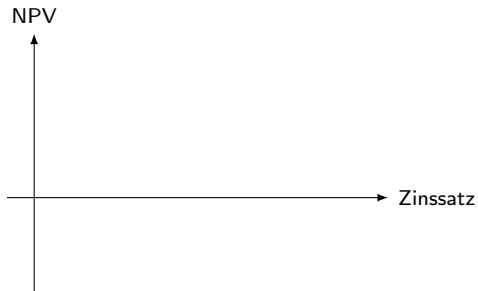
Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

Problem
Herleitung
Beispiel

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

$$-I_0 = -1 \quad CF_1 = 6 \quad CF_2 = -11 \quad CF_3 = 6$$



Grundbegriffe

Dynamische
Verfahren

Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

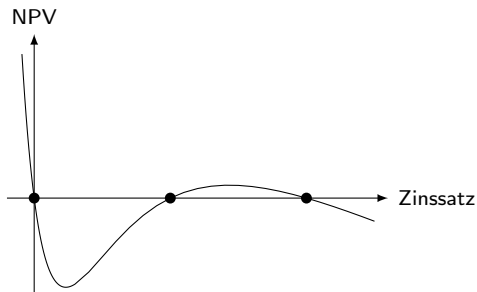
Problem
Herleitung
Beispiel

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

$$-I_0 = -1 \quad CF_1 = 6 \quad CF_2 = -11 \quad CF_3 = 6$$

$$i_{z,1} = 0\% \quad i_{z,2} = 100\% \quad i_{z,3} = 200\%$$



Grundbegriffe

Dynamische
Verfahren

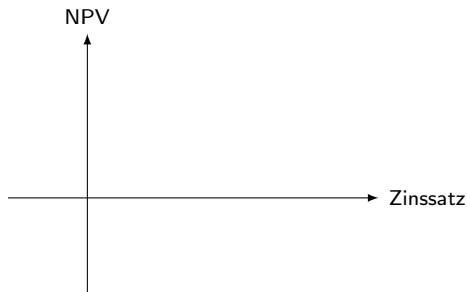
Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

Problem
Herleitung
Beispiel

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

$$-I_0 = -1000 \quad CF_1 = 2090 \quad CF_2 = -1093$$



Grundbegriffe

Dynamische
Verfahren

Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

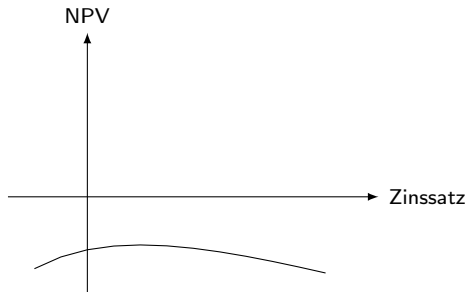
Problem
Herleitung
Beispiel

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

$$-I_0 = -1000 \quad CF_1 = 2090 \quad CF_2 = -1093$$

$$i_z = \frac{\pm \sqrt{-39} + 9}{200}$$



Kapitalwertfunktion ist eine Polynomfunktion T -ten Grades.
Daher gibt es grundsätzlich T reelle oder komplexe Lösungen.

Zudem kann die Entscheidung auch ökonomisch falsch sein:

	$t = 0$	$t = 1$
Projekt A	-1	5
Projekt B	-10	20

Wegen

$$i_{z,A} = 400\% > i_{z,B} = 100\%$$

entscheidet man mit dem internen Zinssatz zu Gunsten von Projekt A. Bei einem Kalkulationszinssatz von $i = 10\%$ ist jedoch Investition B besser als Projekt A.

Äußerste Vorsicht bei der Anwendung des internen Zinses!

Immer zusätzlich den Kapitalwert ermitteln.

Grundbegriffe

Dynamische
Verfahren

Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

Problem
Herleitung
Beispiel

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

Grundbegriffe

Dynamische
Verfahren

Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

Die Preisangabenverordnung verlangt, dass bei

- ▶ Krediten
- ▶ an Privatpersonen

ein “effektiver Jahreszins” (= interner Zins) anzugeben ist.

Kann man diesen internen Zins immer eindeutig ermitteln?

Der interne Zinssatz ist eindeutig und positiv, wenn

- ▶ eine Normalinvestition vorliegt (ein Vorzeichenwechsel),
- ▶ die das Deckungskriterium erfüllt (mehr Einzahlungen als Auszahlungen).

Unsere Aussagen zur (mehr oder weniger) eindeutigen Festlegung des Internen Zinses durch die Preisangabenverordnung gelten nicht für Geldanlagen. Hier sind andere Rendite-Definitionen üblich.

V_t sei der Wert einer Investition in t .

Definition Diskrete Rendite einer Investition

$$r_t^{\text{diskret}} := \frac{V_{t+1}}{V_t} - 1$$

Log-Rendite einer Investition

$$r_t^{\text{Log}} := \ln(V_{t+1}) - \ln(V_t).$$

Grundbegriffe

Dynamische
Verfahren

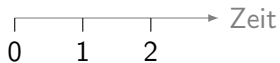
Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

Definitionen
Verwandschaft
Durchschnitte

Diskrete Renditen verwendet man typischerweise in Modellen mit diskreter Zeit (links), Log-Renditen finden sich oft in Modellen mit stetiger Zeit.



Grundbegriffe

Dynamische
Verfahren

Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

Definitionen

Verwandschaft

Durchschnitte

Grundbegriffe

Dynamische
Verfahren

Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

Definitionen

Verwandschaft

Durchschnitte

Sind beide Renditen verwandt?

Ja: Wir nutzen dazu die Taylorreihenentwicklung für $f(\cdot) = \ln(\cdot)$ mit $x = \frac{V_{t+1}}{V_t}$ an der Stelle 1:

$$f(x) \approx f(1) + f'(1) \cdot (x - 1)$$

Grundbegriffe

Dynamische
Verfahren

Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

Definitionen

Verwandschaft

Durchschnitte

Sind beide Renditen verwandt?

Ja: Wir nutzen dazu die Taylorreihenentwicklung für $f(\cdot) = \ln(\cdot)$ mit $x = \frac{V_{t+1}}{V_t}$ an der Stelle 1:

$$f(x) \approx f(1) + f'(1) \cdot (x - 1)$$
$$\ln\left(\frac{V_{t+1}}{V_t}\right) \approx \ln(1) + \frac{1}{1} \cdot \left(\frac{V_{t+1}}{V_t} - 1\right)$$

Grundbegriffe

Dynamische
Verfahren

Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

Definitionen

Verwandschaft

Durchschnitte

Sind beide Renditen verwandt?

Ja: Wir nutzen dazu die Taylorreihenentwicklung für $f(\cdot) = \ln(\cdot)$ mit $x = \frac{V_{t+1}}{V_t}$ an der Stelle 1:

$$f(x) \approx f(1) + f'(1) \cdot (x - 1)$$

$$r_t^{\log} = \ln\left(\frac{V_{t+1}}{V_t}\right) \approx \ln(1) + \frac{1}{1} \cdot \left(\frac{V_{t+1}}{V_t} - 1\right) = r_t^{\text{diskret}}$$

Grundbegriffe

Dynamische
Verfahren

Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

Definitionen

Verwandschaft

Durchschnitte

Sind beide Renditen verwandt?

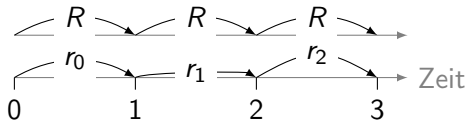
Ja: Wir nutzen dazu die Taylorreihenentwicklung für $f(\cdot) = \ln(\cdot)$ mit $x = \frac{V_{t+1}}{V_t}$ an der Stelle 1:

$$f(x) \approx f(1) + f'(1) \cdot (x - 1)$$

$$r_t^{\log} \approx r_t^{\text{diskret}}$$

Für kleine Werte weichen beide Renditen nicht stark voneinander ab.

Will man Durchschnitte vergangener Renditen bilden, welches Vorgehen ist dann zweckmäßig?



Die Einzelrenditen r_0 bis r_2 weisen eine unterschiedliche Stärke auf (illustriert durch die Höhe der Pfeile), die zweckmäßige Durchschnittsrendite R ist dagegen konstant. R soll so definiert sein, dass sich der gleiche Endwert ergibt.

Grundbegriffe

Dynamische
VerfahrenExkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
renditeDefinitionen
Verwandschaft
Durchschnitte

Satz: Die zweckmäßige durchschnittliche diskrete Rendite R^{diskret} ist das **geometrische Mittel** der r_t^{diskret} .

Hinweis: Dabei sind alle Renditen für die Berechnung um Eins zu erhöhen.

Beweis: Endvermögen nach T Perioden

$$V_T = V_0 \cdot (1 + r_0^{\text{diskret}}) \cdot (1 + r_1^{\text{diskret}}) \cdots (1 + r_{T-1}^{\text{diskret}}).$$

Mit einer zweckmäßigen Durchschnittsrendite R^{diskret} soll sich ebenfalls V_T ergeben:

$$V_T = V_0 \cdot (1 + R^{\text{diskret}})^T.$$

Daraus folgt sofort

$$1 + R^{\text{diskret}} = \sqrt[T]{(1 + r_0^{\text{diskret}}) \cdot (1 + r_1^{\text{diskret}}) \cdots (1 + r_{T-1}^{\text{diskret}})}$$

Grundbegriffe

Dynamische
VerfahrenExkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
renditeDefinitionen
Verwandschaft
Durchschnitte

Satz: Die zweckmäßige durchschnittliche Log-Rendite R^{Log} ist das **arithmetische Mittel** der r_t^{Log} .

Beweis: Zuerst einmal gilt

$$\frac{V_T}{V_0} = \frac{V_T}{V_{T-1}} \cdot \frac{V_{T-1}}{V_{T-2}} \cdot \frac{V_{T-2}}{V_{T-3}} \cdots \frac{V_1}{V_0},$$

Logarithmus auf beiden Seiten liefert

$$\begin{aligned} \ln\left(\frac{V_T}{V_0}\right) &= \ln\left(\frac{V_T}{V_{T-1}}\right) + \ln\left(\frac{V_{T-1}}{V_{T-2}}\right) + \cdots + \ln\left(\frac{V_1}{V_0}\right) \\ &= \sum_{t=0}^{T-1} r_t^{\text{Log}}. \end{aligned}$$

Grundbegriffe

Dynamische
VerfahrenExkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
renditeDefinitionen
Verwandschaft
Durchschnitte

Mit zweckmäßiger Durchschnittsrendite T Mal gilt

$$\ln \left(\frac{V_T}{V_0} \right) = \sum_{t=0}^{T-1} R^{\text{Log}} = TR^{\text{Log}}.$$

Daraus folgt dann

$$R^{\text{Log}} = \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} r_t^{\text{Log}}$$

Grundbegriffe

Dynamische
Verfahren

Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite

Definitionen
Verwandschaft
Durchschnitt

Was passiert, wenn man dies durcheinander bringt? Beispiel einer Wertentwicklung

$$\begin{array}{ccc} t = 0 & t = 1 & t = 2 \\ \hline 100 & 200 & 100 \end{array}$$

“Außer Spesen nichts gewesen”!

Grundbegriffe

Dynamische
VerfahrenExkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
renditeDefinitionen
Verwandschaft
Durchschnitte

Was passiert, wenn man dies durcheinander bringt? Beispiel einer Wertentwicklung

$$\begin{array}{ccc} t = 0 & t = 1 & t = 2 \\ \hline 100 & 200 & 100 \end{array}$$

“Außer Spesen nichts gewesen”!

Diskrete Renditen sind hier +100% und -50%. Der arithmetische Durchschnitt ist

$$\frac{100\% - 50\%}{2} = 25\%!!$$

Grundbegriffe

Dynamische
VerfahrenExkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
renditeDefinitionen
Verwandschaft
Durchschnitt

Was passiert, wenn man dies durcheinander bringt? Beispiel einer Wertentwicklung

$$\begin{array}{ccc} t = 0 & t = 1 & t = 2 \\ \hline 100 & 200 & 100 \end{array}$$

“Außer Spesen nichts gewesen”!

Diskrete Renditen sind hier +100% und -50%. Der geometrische Durchschnitt ist dagegen

$$\sqrt{(1 + 100\%)(1 - 50\%)} = 1 + 0\%$$

Grundbegriffe

Dynamische
VerfahrenExkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
renditeDefinitionen
Verwandschaft
Durchschnitt

Grundbegriffe

Dynamische
VerfahrenExkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
renditeDefinitionen
Verwandschaft
Durchschnitt

Was passiert, wenn man dies durcheinander bringt? Beispiel einer Wertentwicklung

$$\begin{array}{ccc} t = 0 & t = 1 & t = 2 \\ \hline 100 & 200 & 100 \end{array}$$

“Außer Spesen nichts gewesen”!

Die Log-Renditen betragen +69,31% und -69,31%. Der arithmetische Durchschnitt ist offensichtlich 0%.

- ▶ Vollständiger Finanzplan und Kapitalwert führen zu identischen Entscheidungen, Kapitalwert setzt perfekte Märkte voraus (Sollzins=Habenzins, keine Steuern und Transaktionskosten, kein Kreditlimit)
- ▶ Kapitalwert vergleicht Investition mit Kapitalmarktanlage
- ▶ interner Zins muss mit Näherungsverfahren bestimmt werden, stellt eine problematische Größe dar
- ▶ Ein zweckmäßiger Durchschnitt diskreter Renditen ist das geometrische Mittel; ein zweckmäßiger Durchschnitt von Log-Renditen ist das arithmetische Mittel.

Grundbegriffe

Dynamische
Verfahren

Exkurs: Nähe-
rungsverfahren

eff. Jahreszins

Durchschnitts-
rendite